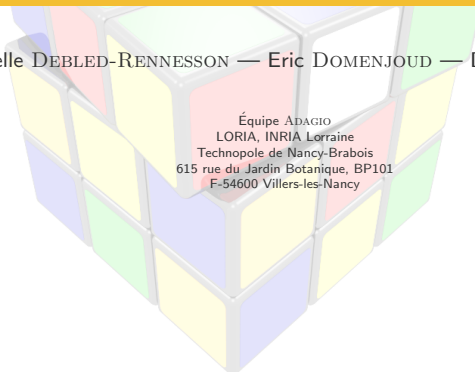


Etudes de différents modèles de courbes discrètes

Journées **Informatique et Géométrie**

Lyon, le 2 juin 2006

Isabelle DEBLED-RENNESSON — Eric DOMENJOUR — Damien JAMET



Équipe ADAGIO
LORIA, INRIA Lorraine
Technopole de Nancy-Brabois
615 rue du Jardin Botanique, BP101
F-54600 Villers-les-Nancy

Discrétisation
de courbes

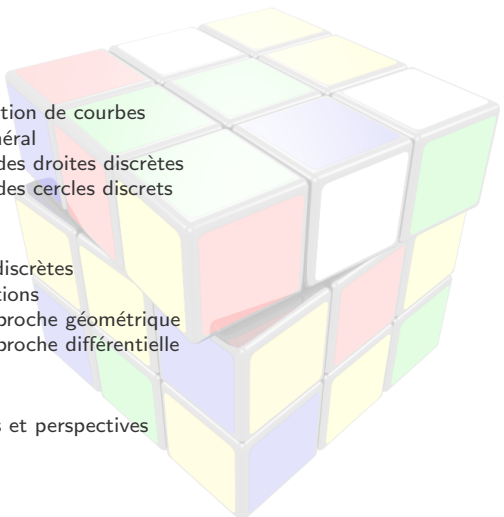
Cas général

Le cas des
droites
discrètesLe cas des
cercles discretsCourbes
discrètes

Motivations

Une approche
géométriqueUne approche
différentielleQuestions et
perspectives

Plan

- 
- 1** Discrétisation de courbes
 - Cas général
 - Le cas des droites discrètes
 - Le cas des cercles discrets
 - 2** Courbes discrètes
 - Motivations
 - Une approche géométrique
 - Une approche différentielle
 - 3** Questions et perspectives

Discrétisation de courbes

Cas général

Le cas des droites discrètes

Le cas des cercles discrets

Courbes discrètes

Motivations

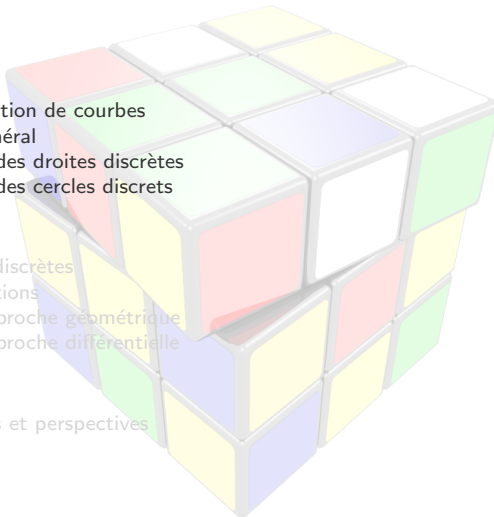
Une approche géométrique

Une approche différentielle

Questions et perspectives

Plan

- 1** Discrétisation de courbes
 - Cas général
 - Le cas des droites discrètes
 - Le cas des cercles discrets
- 2** Courbes discrètes
 - Motivations
 - Une approche géométrique
 - Une approche différentielle
- 3** Questions et perspectives



Discrétisation de courbes

Cas général

Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

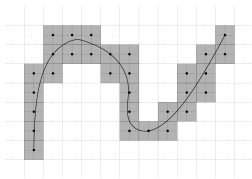
Courbes discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

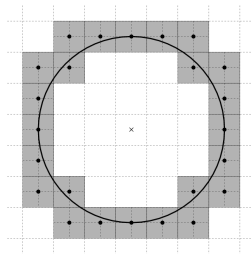
Questions et perspectives

Discrétisation de courbes

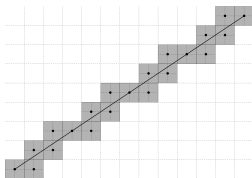
Différentes méthodes



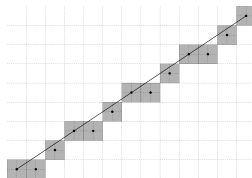
(a) Supercouverture d'une courbe 2D



(b) Supercouverture d'un cercle



(c) Discrétisation standard d'un segment



(d) Discrétisation naïve d'un segment

Discrétisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Droites discrètes

Un cas très particulier

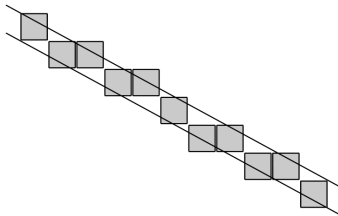


FIG.: Exemples de droites arithmétiques : $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, -\frac{\|\mathbf{v}\|_\infty}{2} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 < \frac{\|\mathbf{v}\|_\infty}{2} \right\}$.

Définition (Droite arithmétique, J.-P. Reveillès - 1991)

La droite arithmétique $D(\mathbf{v}, \mu, w)$ de **vecteur normal** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, de **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et d'**épaisseur** $w \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$D(\mathbf{v}, \mu, w) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \in [\mu, \mu + w] \right\}$$



J.-P. Reveillès.

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Discretisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Droites discrètes

Un cas très particulier

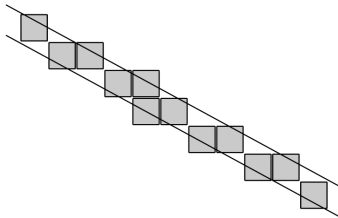


FIG.: Exemples de droites arithmétiques : $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w}{2} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 < \frac{w}{2}\}$.

Définition (Droite arithmétique, J.-P. Reveillès - 1991)

La droite arithmétique $D(\mathbf{v}, \mu, w)$ de **vecteur normal** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, de **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et d'**épaisseur** $w \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$D(\mathbf{v}, \mu, w) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \in [\mu, \mu + w]\}$$



J.-P. Reveillès.

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Droites discrètes

Un cas très particulier

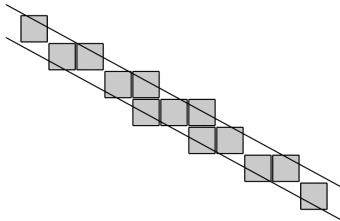


FIG.: Exemples de droites arithmétiques : $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w}{2} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 < \frac{w}{2} \}$.

Définition (Droite arithmétique, J.-P. Reveillès - 1991)

La droite arithmétique $D(\mathbf{v}, \mu, w)$ de **vecteur normal** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, de **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et de **épaisseur** $w \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$D(\mathbf{v}, \mu, w) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \in [\mu, \mu + w] \}$$



J.-P. Reveillès.

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Discrétisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Droites discrètes

Un cas très particulier

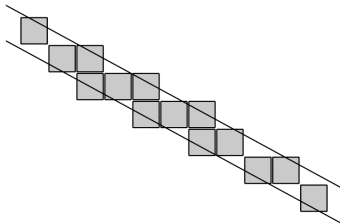


FIG.: Exemples de droites arithmétiques : $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w}{2} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 < \frac{w}{2}\}$.

Définition (Droite arithmétique, J.-P. Reveillès - 1991)

La droite arithmétique $D(\mathbf{v}, \mu, w)$ de **vecteur normal** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, de **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et de **épaisseur** $w \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$D(\mathbf{v}, \mu, w) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \in [\mu, \mu + w]\}$$



J.-P. Reveillès.

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Discrétisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Droites discrètes

Un cas très particulier

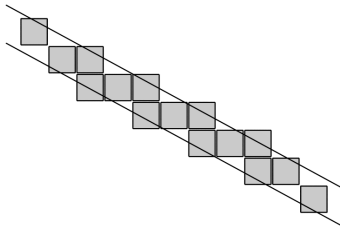


FIG.: Exemples de droites arithmétiques : $\{x \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w}{2} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 < \frac{w}{2}\}$.

Définition (Droite arithmétique, J.-P. Reveillès - 1991)

La droite arithmétique $D(\mathbf{v}, \mu, w)$ de **vecteur normal** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, de **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et de **épaisseur** $w \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$D(\mathbf{v}, \mu, w) = \{x \in \mathbb{Z}^2, \langle \mathbf{v}, x \rangle \in [\mu, \mu + w]\}$$



J.-P. Reveillès.

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Discrétisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Droites discrètes

Un cas très particulier

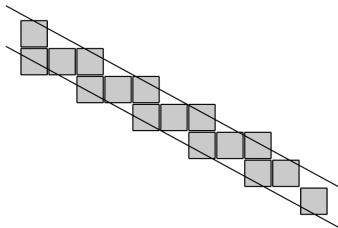


FIG.: Exemples de droites arithmétiques : $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w}{2} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 < \frac{w}{2}\}$.

Définition (Droite arithmétique, J.-P. Reveillès - 1991)

La droite arithmétique $D(\mathbf{v}, \mu, w)$ de **vecteur normal** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, de **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et d'**épaisseur** $w \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$D(\mathbf{v}, \mu, w) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \in [\mu, \mu + w]\}$$



J.-P. Reveillès.

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Droites discrètes

Un cas très particulier

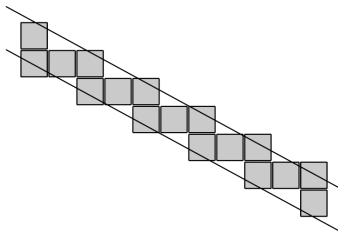


FIG.: Exemples de droites arithmétiques : $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, -\frac{\|\mathbf{v}\|_1}{2} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 < \frac{\|\mathbf{v}\|_1}{2} \right\}$.

Définition (Droite arithmétique, J.-P. Reveillès - 1991)

La droite arithmétique $D(\mathbf{v}, \mu, w)$ de **vecteur normal** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, de **décalage** $\mu \in \mathbb{R}$ et d'**épaisseur** $w \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$D(\mathbf{v}, \mu, w) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \in [\mu, \mu + w] \right\}$$



J.-P. Reveillès.

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Discrétisation
de courbes

Cas général

Le cas des
droites
discrètesLe cas des
cercles discretsCourbes
discrètes

Motivations

Une approche
géométriqueUne approche
différentielleQuestions et
perspectives

Cercles et sphères discrets analytiques

BRESENHAM, ANDRES...

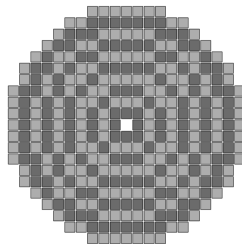
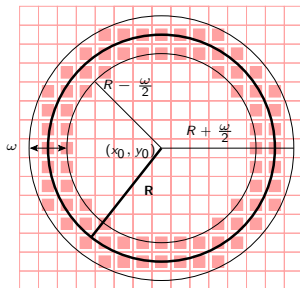


FIG.: Principe général — Des cercles réguliers concentriques

Discrétisation
de courbes

Cas général

Le cas des
droites
discrètes

Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations

Une approche
géométrique

Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Cercles discrets d'épaisseur variable

C. FIORIO, D. JAMET & J.-L. TOUTANT, 2006

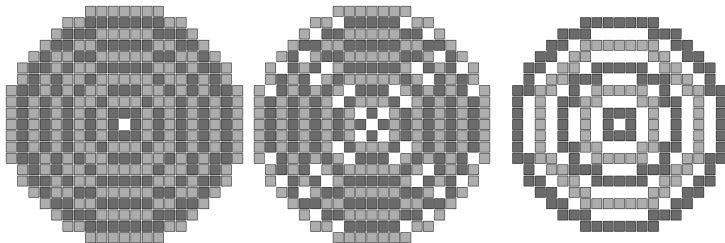


FIG.: Cercles réguliers — Cercles naïfs — Cercles standard

$$C(\mathbf{x}, R, w) = \left\{ \mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w(x_1, x_2)}{2} \leq (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 - R^2 < \frac{w(x_1, x_2)}{2} \right\},$$

avec $w(x_1, x_2) = \|(2x_1, 2x_2)\|_\infty$ (resp. $w(x_1, x_2) = \|(2x_1, 2x_2)\|_1$).



C. Fiorio, D. Jamet, and J.-L. Toutant.

Discrete circles : an arithmetical approach with non-constant thickness.

Vision Geometry XIV, Electronic Imaging, SPIE, volume 6066, pages 0C-1-0C-12, San Jose (CA), USA, January 2006. SPIE.

Discrétisation
de courbes

- Cas général
- Le cas des
droites
discrètes
- Le cas des
cercles discrets

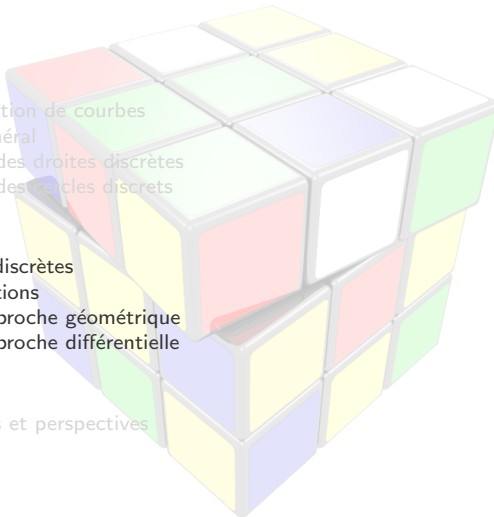
Courbes
discrètes

- Motivations
- Une approche
géométrique
- Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Plan

- 1 Discrétisation de courbes
 - Cas général
 - Le cas des droites discrètes
 - Le cas des cercles discrets
- 2 Courbes discrètes
 - Motivations
 - Une approche géométrique
 - Une approche différentielle
- 3 Questions et perspectives



Courbes discrètes *arithmétiques*

Motivations

1 Définition d'une géométrie discrète non-linéaire

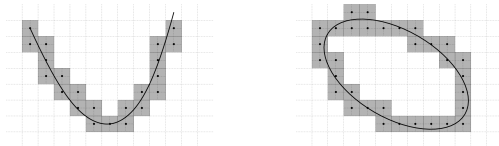


FIG.: Une *parabole* et une *ellipse* discrète

2 Différentielle discrète, courbure discrète, torsion discrète...

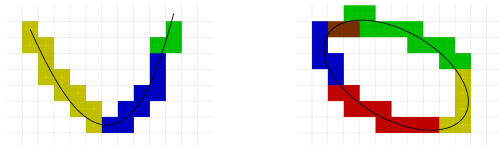


FIG.: Une *parabole* segmentée — Une *ellipse* discrète segmentée

3 Algorithmes de reconnaissance...

Discrétisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

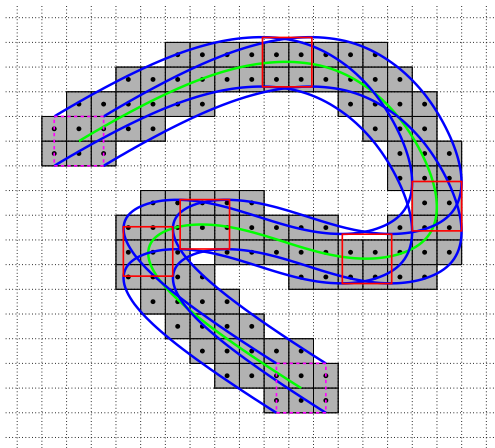
Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : définition

Discrétisation par la norme $\| \cdot \|_{\infty}$



Discrétisation
de courbes

- Cas général
- Le cas des
droites
discrètes
- Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

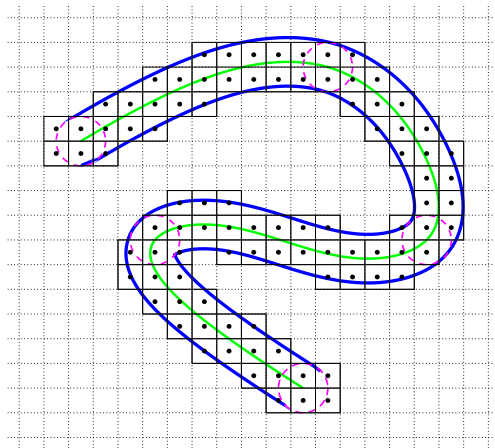
- Motivations
- Une approche
géométrique
- Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : définition

Discrétisation par la norme $\| \cdot \|_2$



Discrétisation
de courbes

- Cas général
- Le cas des
droites
discrètes
- Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

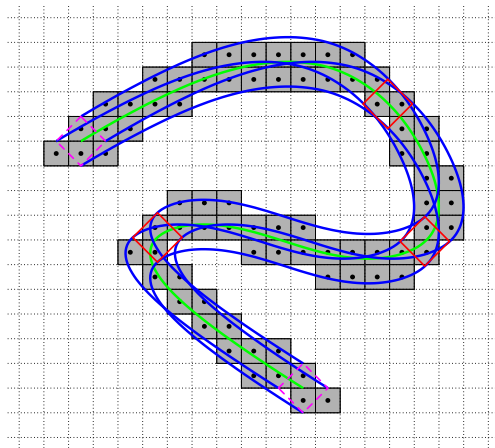
- Motivations
- Une approche
géométrique
- Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : définition

Discrétisation par la norme $\| \cdot \|_1$



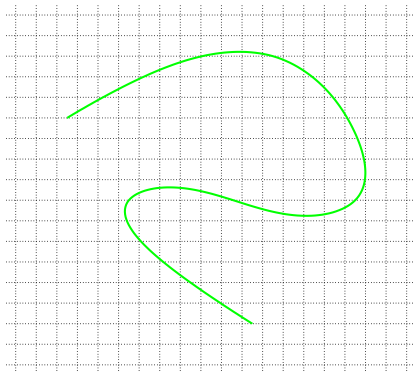
Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : caractérisation des courbes englobantes

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ (par exemple algébrique).

- 1 Cas de la norme $\| \cdot \|_\infty$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_\infty(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où l'une des dérivées change de signe.
- 2 Cas de la norme $\| \cdot \|_1$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_1(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où les deux dérivées sont égales en valeur absolue.
- 3 Cas de la norme $\| \cdot \|_2$
 - Problème : rayon de courbure inférieur au rayon de la boule $B_2(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où le rayon de courbure est inférieure au rayon du cercle ?
 - Difficulté : équation de la courbe englobante.



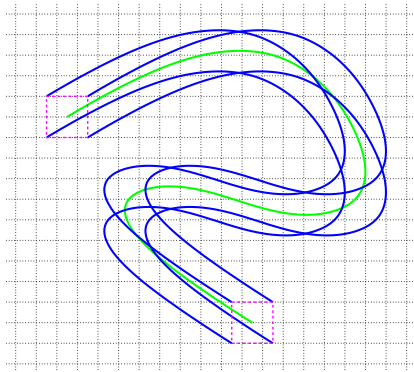
Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : caractérisation des courbes englobantes

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ (par exemple algébrique).

- 1 Cas de la norme $\| \cdot \|_\infty$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_\infty(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où l'une des dérivées change de signe.
- 2 Cas de la norme $\| \cdot \|_1$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_1(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où les deux dérivées sont égales en valeur absolue.
- 3 Cas de la norme $\| \cdot \|_2$
 - Problème : rayon de courbure inférieur au rayon de la boule $B_2(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où le rayon de courbure est inférieure au rayon du cercle ?
 - Difficulté : équation de la courbe englobante.



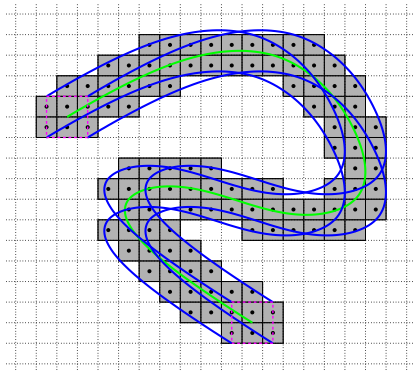
Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : caractérisation des courbes englobantes

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ (par exemple algébrique).

- 1 Cas de la norme $\| \cdot \|_\infty$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_\infty(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où l'une des dérivées change de signe.
- 2 Cas de la norme $\| \cdot \|_1$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_1(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où les deux dérivées sont égales en valeur absolue.
- 3 Cas de la norme $\| \cdot \|_2$
 - Problème : rayon de courbure inférieur au rayon de la boule $B_2(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où le rayon de courbure est inférieure au rayon du cercle ?
 - Difficulté : équation de la courbe englobante.



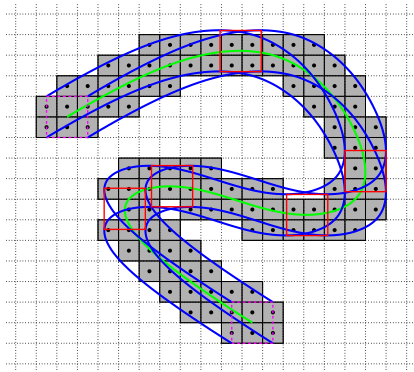
Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : caractérisation des courbes englobantes

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ (par exemple algébrique).

- 1 Cas de la norme $\| \cdot \|_\infty$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_\infty(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où l'une des dérivées change de signe.
- 2 Cas de la norme $\| \cdot \|_1$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_1(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où les deux dérivées sont égales en valeur absolue.
- 3 Cas de la norme $\| \cdot \|_2$
 - Problème : rayon de courbure inférieur au rayon de la boule $B_2(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où le rayon de courbure est inférieure au rayon du cercle ?
 - Difficulté : équation de la courbe englobante.



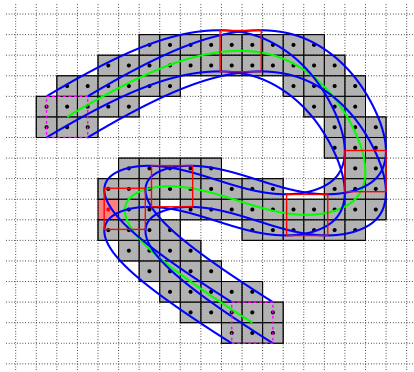
Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : caractérisation des courbes englobantes

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ (par exemple algébrique).

- 1 Cas de la norme $\| \cdot \|_\infty$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_\infty(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où l'une des dérivées change de signe.
- 2 Cas de la norme $\| \cdot \|_1$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_1(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où les deux dérivées sont égales en valeur absolue.
- 3 Cas de la norme $\| \cdot \|_2$
 - Problème : rayon de courbure inférieur au rayon de la boule $B_2(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où le rayon de courbure est inférieure au rayon du cercle ?
 - Difficulté : équation de la courbe englobante.



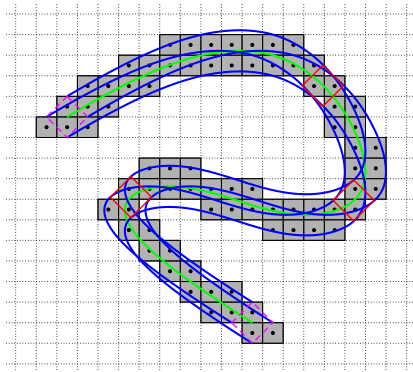
Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : caractérisation des courbes englobantes

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ (par exemple algébrique).

- 1 Cas de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonale de la boule $B_{\infty}(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où l'une des dérivées change de signe.
- 2 Cas de la norme $\| \cdot \|_1$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonale de la boule $B_1(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où les deux dérivées sont égales en valeur absolue.
- 3 Cas de la norme $\| \cdot \|_2$
 - Problème : rayon de courbure inférieur au rayon de la boule $B_2(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où le rayon de courbure est inférieure au rayon du cercle ?
 - Difficulté : équation de la courbe englobante.



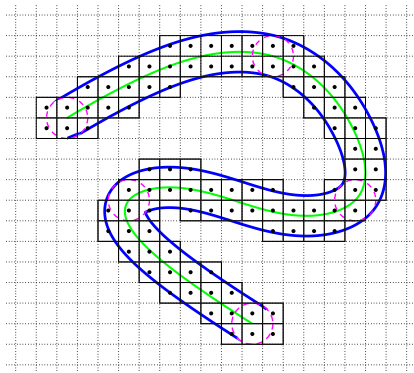
Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique : caractérisation des courbes englobantes

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ (par exemple algébrique).

- 1 Cas de la norme $\| \cdot \|_\infty$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_\infty(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où l'une des dérivées change de signe.
- 2 Cas de la norme $\| \cdot \|_1$
 - Décalage de la courbe suivant les diagonales de la boule $B_1(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où les deux dérivées sont égales en valeur absolue.
- 3 Cas de la norme $\| \cdot \|_2$
 - Problème : rayon de courbure inférieur au rayon de la boule $B_2(x, w/2)$.
 - Points critiques : points où le rayon de courbure est inférieure au rayon du cercle ?
 - Difficulté : équation de la courbe englobante.



Discrétisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique

Points forts

- Bon **épaississement** pour la norme $\|\cdot\|_2$
- **Caractérisation simple** des **courbes englobantes** pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$
- Construction courbe englobante pour $\|\cdot\|_2$ **commute** avec rotations, similitudes...
- ...

Propriété

La courbe discrète obtenue par la boule $B_1(x, 1/2)$ (resp. $B_\infty(x, 1/2)$) est **8-connexe** (resp. **4-connexe**).

Fait

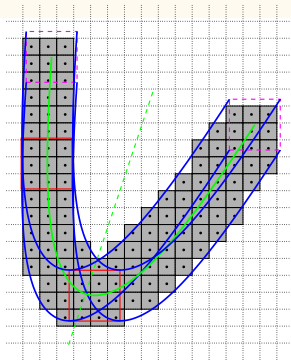
Généralisation des droites arithmétiques

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique

Points faibles

- Apparition de **plats** pour les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ (dissymétrie sur les paraboles obliques par exemple)
- **Ne commute pas** avec les **rotations** pour les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$
- ...

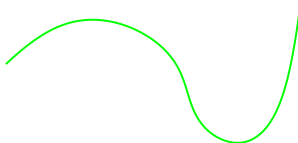


Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique

Méthodes de construction pour la norme $\| \cdot \|_2$

- Caractérisation **difficile** de la **courbe englobante** pour la norme $\| \cdot \|_2$



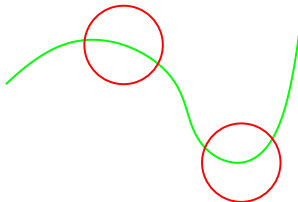
```
CourbeEnglobante := proc(P,r)
local G,R,T :
R :=(x-u)^2+(y-v)^2-r^2 :
N :=(x-u)*diff(P,v)-(y-v)*diff(P,u) :
G :=Groebner[gbasis]([P,R,T],plex(u,v,x,y))
return op(1,G) :
end :
```

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique

Méthodes de construction pour la norme $\| \cdot \|_2$

- Caractérisation **difficile** de la **courbe englobante** pour la norme $\| \cdot \|_2$



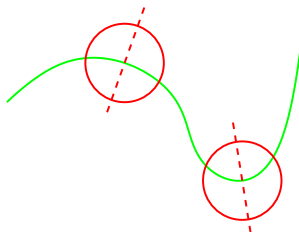
```
CourbeEnglobante := proc(P,r)
local G,R,T :
R :=(x-u)^2+(y-v)^2-r^2 :
N :=(x-u)*diff(P,v)-(y-v)*diff(P,u) :
G :=Groebner[gbasis]([P,R,T],plex(u,v,x,y))
return op(1,G) :
end :
```

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique

Méthodes de construction pour la norme $\| \cdot \|_2$

- Caractérisation **difficile** de la **courbe englobante** pour la norme $\| \cdot \|_2$



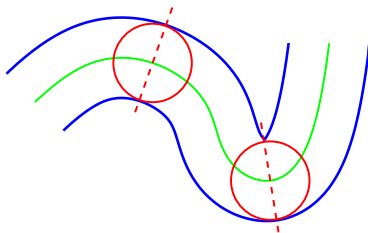
```
CourbeEnglobante := proc(P,r)
local G,R,T :
R :=(x-u)^2+(y-v)^2-r^2 :
N :=(x-u)*diff(P,v)-(y-v)*diff(P,u) :
G :=Groebner[gbasis]([P,R,T],plex(u,v,x,y))
return op(1,G) :
end :
```

Courbes discrètes implicites

Une approche géométrique

Méthodes de construction pour la norme $\| \cdot \|_2$

- Caractérisation **difficile** de la **courbe englobante** pour la norme $\| \cdot \|_2$



```
CourbeEnglobante := proc(P,r)
local G,R,T :
R :=(x-u)^2+(y-v)^2-r^2 :
N :=(x-u)*diff(P,v)-(y-v)*diff(P,u) :
G :=Groebner[gbasis]([P,R,T],plex(u,v,x,y))
return op(1,G) :
end :
```

Discrétisation
de courbes

Cas général

Le cas des

 droites
discrètes

 Le cas des
cercles discrets

 Courbes
discrètes

Motivations

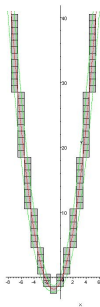
 Une approche
géométrique

 Une approche
différentielle

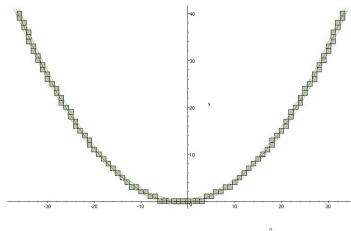
 Questions et
perspectives

Courbes discrètes implicites

Une approche différentielle



$$\frac{w_{\infty}}{2} \leq -7x^2 - 14x + 6 - 7y < \frac{w_{\infty}}{2}$$



$$\frac{w_{\infty}}{2} \leq -2x^2 - 6x + 19 - 60y < \frac{w_{\infty}}{2}$$

Hypothèses

 On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

On pose :

$$w_{\kappa}(x_1, x_2) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\|_{\kappa},$$

 avec $\kappa \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Discrétisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

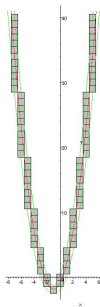
Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

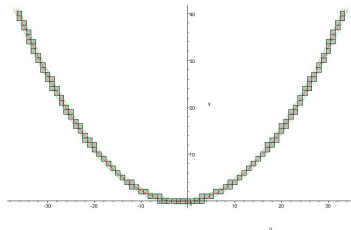
Questions et
perspectives

Courbes discrètes implicites

Une approche différentielle



$$\frac{w_2}{2} \leq -7x^2 - 14x + 6 - 7y < \frac{w_2}{2}$$



$$\frac{w_2}{2} \leq -2x^2 - 6x + 19 - 60y < \frac{w_2}{2}$$

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

On pose :

$$w_\kappa(x_1, x_2) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\|_\kappa,$$

avec $\kappa \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Discrétisation
de courbes

Cas général

Le cas des
droites
discrètes

Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations

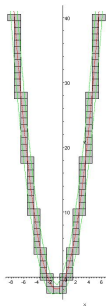
Une approche
géométrique

Une approche
différentielle

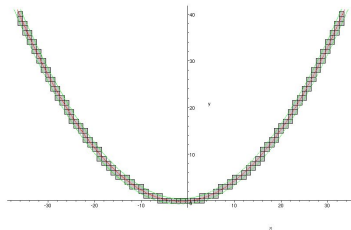
Questions et
perspectives

Courbes discrètes implicites

Une approche différentielle



$$\frac{w_1}{2} \leq -7x^2 - 14x + 6 - 7y < \frac{w_1}{2}$$



$$\frac{w_1}{2} \leq -2x^2 - 6x + 19 - 60y < \frac{w_1}{2}$$

Hypothèses

On considère une courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

On pose :

$$w_{\kappa}(x_1, x_2) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\|_{\kappa},$$

avec $\kappa \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Courbes discrètes implicites

Une approche différentielle

Hypothèses

Soit f une **parabole** (éventuellement oblique) $f(x, y) = 0$.

On pose :

$$w_{\kappa}(x_1, x_2) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right\|_{\kappa},$$

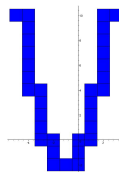
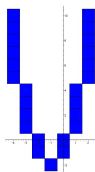
avec $\kappa \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Théorème

L'ensemble

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w_{\kappa}(x_1, x_2)}{2} \leq f(x_1, x_2) < \frac{w_{\kappa}(x_1, x_2)}{2} \right\}$$

est **8-connexe** (resp. **4-connexe**) si $\kappa = \infty$ (resp. si $\kappa = 1$).



Courbes discrètes implicites

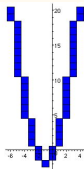
Une approche différentielle

Points forts

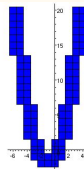
- Philosophique : extension *naturelle* des droites arithmétiques
- Topologique : caractérisation de la κ -connexité ($\kappa \in \{4, 8\}$)
- Algorithmique : algorithme itératif de construction
- Définition en compréhension : test d'appartenance simple

Points faibles

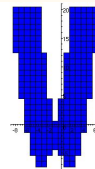
- Analytique :
 - la courbe discrète dépend *intrinsèquement* de l'équation de la courbe
 - on n'évalue pas la différentielle sur la courbe mais sur des points *proches*
- Topologique : mauvais épaississement pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$



Épaisseur w_∞



Épaisseur $2w_\infty$



Épaisseur $5w_\infty$

Courbes discrètes implicites

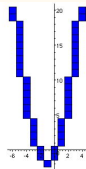
Une approche différentielle

Points forts

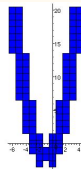
- Philosophique : extension *naturelle* des droites arithmétiques
- Topologique : caractérisation de la κ -connexité ($\kappa \in \{4, 8\}$)
- Algorithmique : algorithme itératif de construction
- Définition en compréhension : test d'appartenance simple

Points faibles

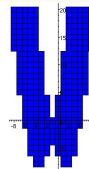
- Analytique :
 - la courbe discrète dépend *intrinsèquement* de l'équation de la courbe
 - on n'évalue pas la différentielle sur la courbe mais sur des points *proches*
- Topologique : et la norme $\| \cdot \|_2$?



Épaisseur w_2



Épaisseur $2w_2$



Épaisseur $5w_2$

Discrétisation
de courbes

Cas général

Le cas des
droites
discrètes

Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

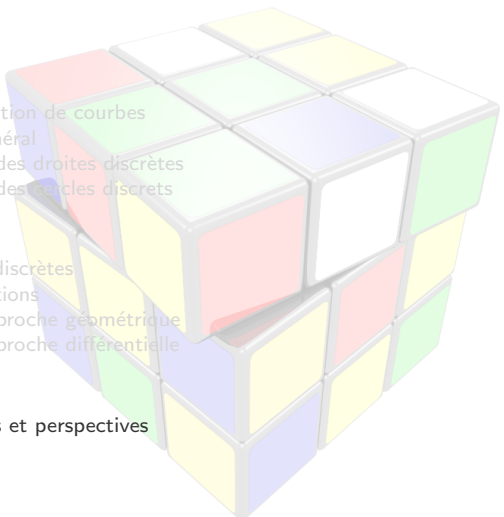
Motivations

Une approche
géométrique

Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Plan

- 
- 1 Discrétisation de courbes
 - Cas général
 - Le cas des droites discrètes
 - Le cas des cercles discrets
 - 2 Courbes discrètes
 - Motivations
 - Une approche géométrique
 - Une approche différentielle
 - 3 Questions et perspectives

Discretisation
de courbes

Cas général
Le cas des
droites
discrètes
Le cas des
cercles discrets

Courbes
discrètes

Motivations
Une approche
géométrique
Une approche
différentielle

Questions et
perspectives

Questions et perspectives

1 Approche géométrique

- 1 Équation de la courbe englobante d'une courbe *quelconque* pour la norme $\| \cdot \|_2$
- 2 Test d'appartenance
- 3 Algorithme de construction
- 4 Reconnaissance

2 Approche différentielle

- 1 Caractérisation de la connexité (8-connexité (stricte), 4-connexité (stricte)) pour les courbes *quelconques*
- 2 Reconnaissance (dualité. . .)