Introduction à l’Homologie

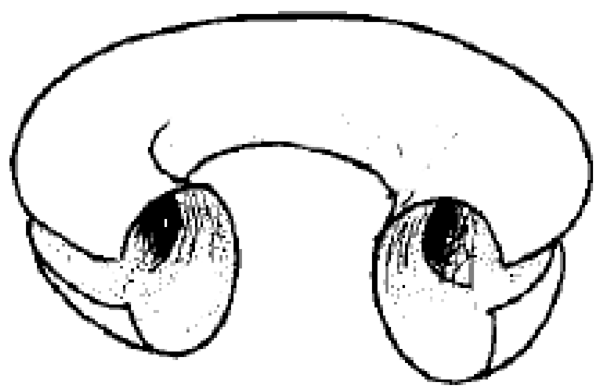
S. Alayrangues, *S. Peltier*, *L. Fuchs, J-O. Lachaud.*

SIC, Université de Poitiers,

LaBRI, Université de Bordeaux

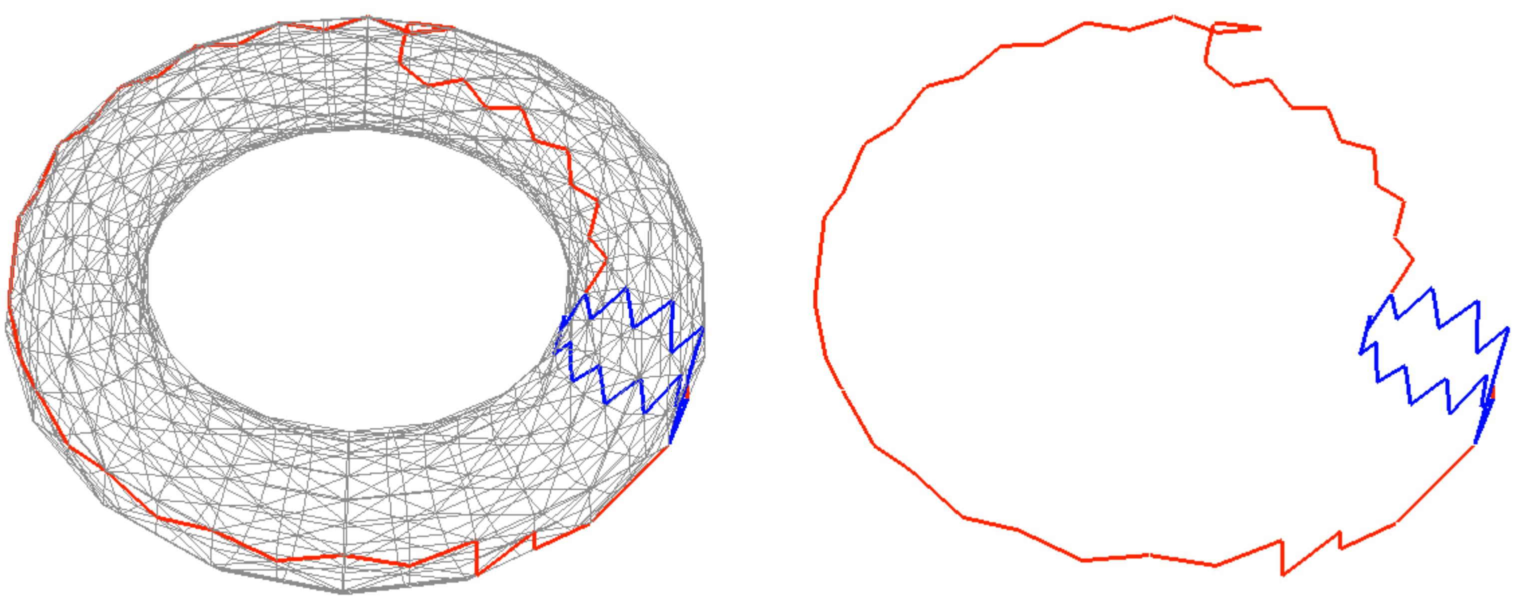
Introduction

- Famille de groupes $\{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$
  - Dimension 0 : composantes connexes,
  - Dimension 1 : nombre maximal de coupes non déconnectantes
  - Dimension 2 : cavité
  - $\ldots$



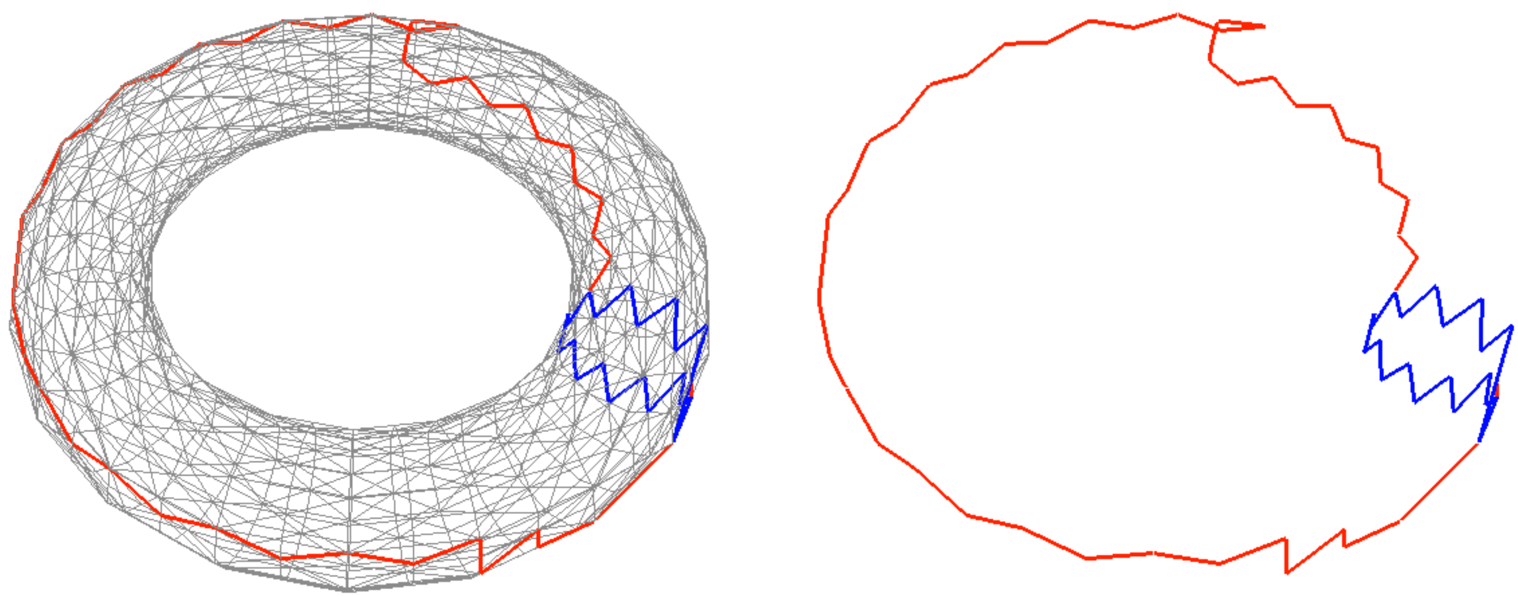
Introduction (suite)

- Caractérisation des « trous » en chaque dimension :
  - Quantité : *Nombres de Betti + Coefficients de torsion*
  - Représentation : *Générateurs*



Introduction (suite)

- Caractérisation des « trous » en chaque dimension :
- “Effet de bord” : orientabilité d’une variété



Organisation

- Exemples d’utilisations en imagerie
- Calcul de l’homologie sur des ensembles semi-simpliciaux
- Questions ouvertes

Exemples d'utilisation

Nombres de Betti

- Définition et comptage de trous sur des images

  Rosenfeld et al. *Holes and Genus Of $2D$ and $3D$ Digital Images* 1993

- Justification d'une définition de points simples

  Bloch et al.. *A new characterization of simple elements in a tetrahedral mesh.* 2005

- Caractérisation de points homologiquement simples

  Niethammer et al. *On the detection of simple points in higher dimensions using cubical homology*

- Calcul des nombres de Betti sur des images $3D$ segmentées

  Desbarats et al. *Retrieving and Using Topological Characteristics from 3D Discrete Images* 2002

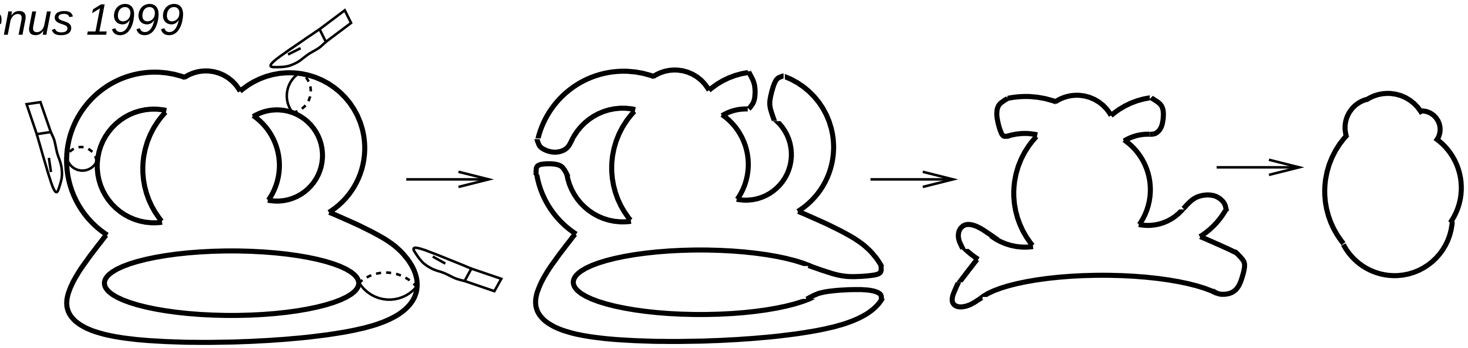
SIC SIGNAL IMAGE COMMUNICATIONS

Exemples d'utilisation

Nombres de Betti et Générateurs

- Découpages de polyèdres contraints par la topologie

  Kartasheva The algorithm for automatic cutting of three dimensional polyhedron of h-genus 1999



- Comptage et représentation de vaisseaux sanguins

  Niethammer et al. *Analysis of blood vessel topology by cubical homology* 2002

SIC
SIGNAL
IMAGE
COMMUNICATIONS

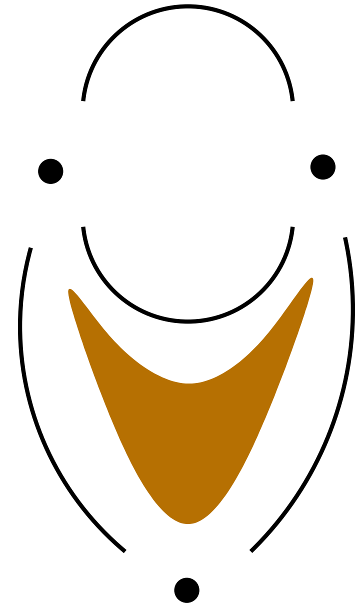
Calcul de l'homologie

- Subdivision cellulaire “adéquate” :
  - Complexe simplicial,
  - Complexe cubique,
  - Ensemble semi-simplicial,
  - Ensemble simploidal,
  - . . .
- Méthode générique : matricielle

SIC
SIGNAL
IMAGE
COMMUNICATIONS

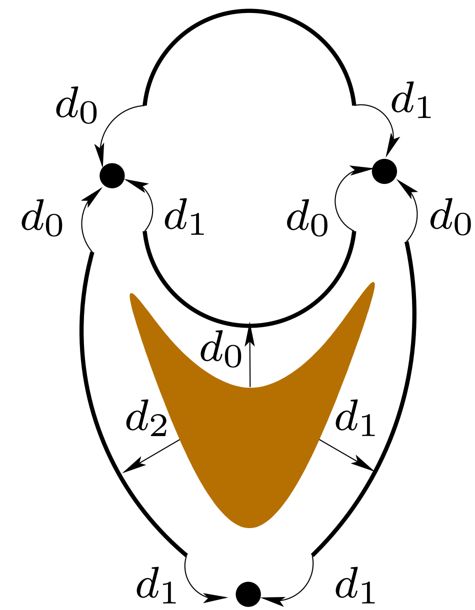
Ensembles semi-simpliciaux

- Ensemble de simplexes abstraits



Ensembles semi-simpliciaux

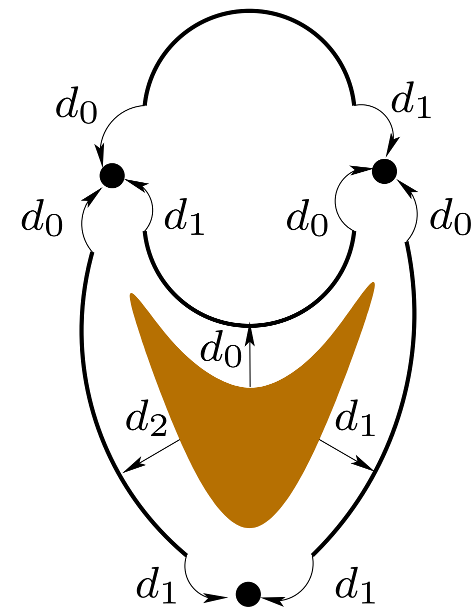
- Ensemble de simplexes abstraits
- Opérateurs de bord



Ensembles semi-simpliciaux

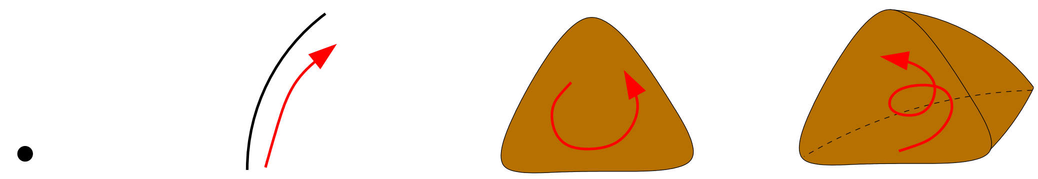
- Ensemble de simplexes abstraits
- Opérateurs de bord
- Relation de cohérence

$$\boxed{d_i d_j = d_j d_{i-1} \text{ avec } j < i}$$



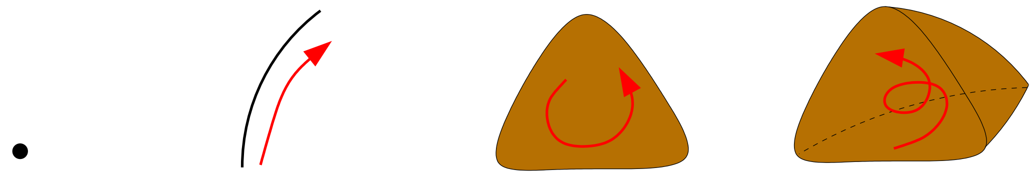
Orientation

- Simplexes munis d'une orientation



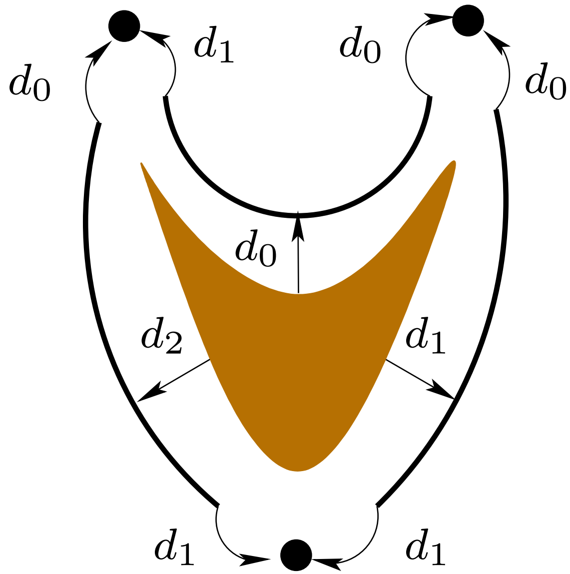
Orientation

- Simplexes munis d'une orientation



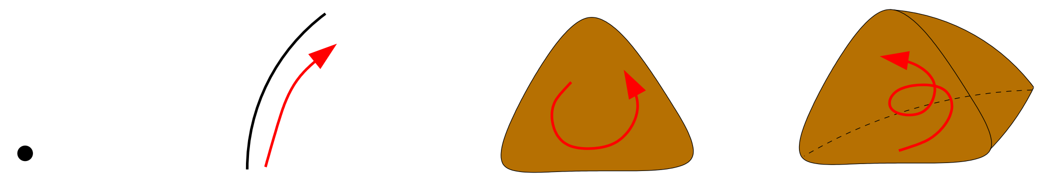
- Bord d'un simplexe

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{dim(\sigma)} (-1)^i \sigma d_i$$



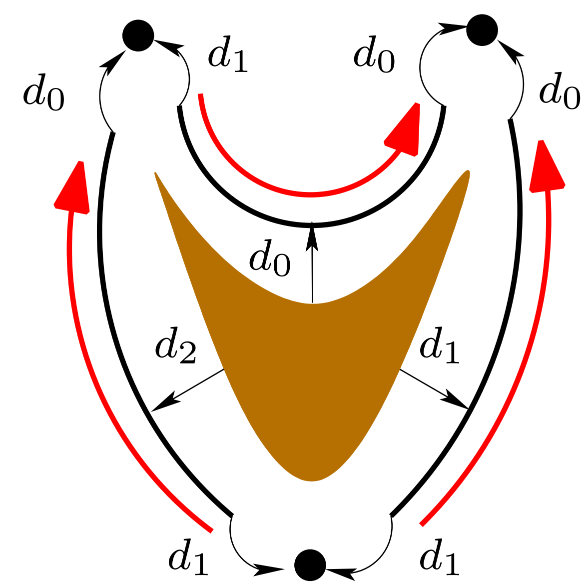
Orientation

- Simplexes munis d'une orientation



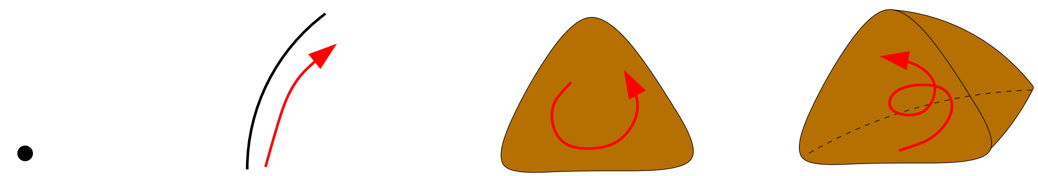
- Bord d'un simplexe

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{dim(\sigma)} (-1)^i \sigma d_i$$



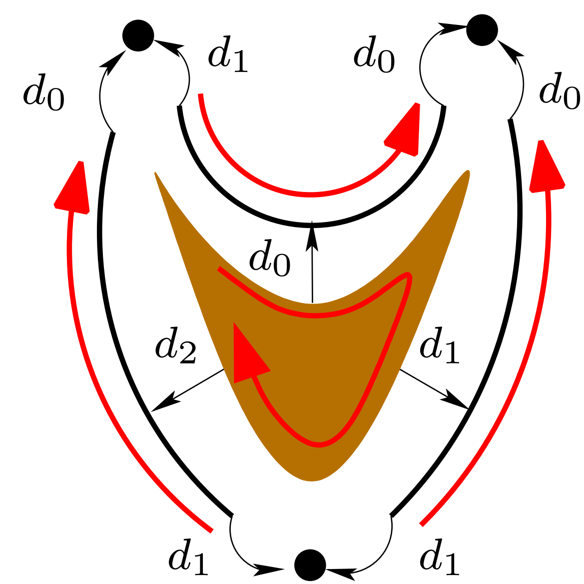
Orientation

- Simplexes munis d'une orientation



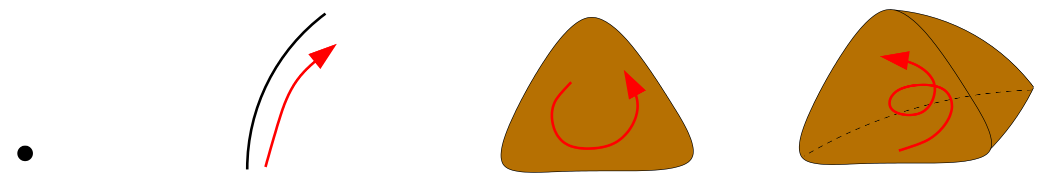
- Bord d'un simplexe

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{dim(\sigma)} (-1)^i \sigma d_i$$



Orientation

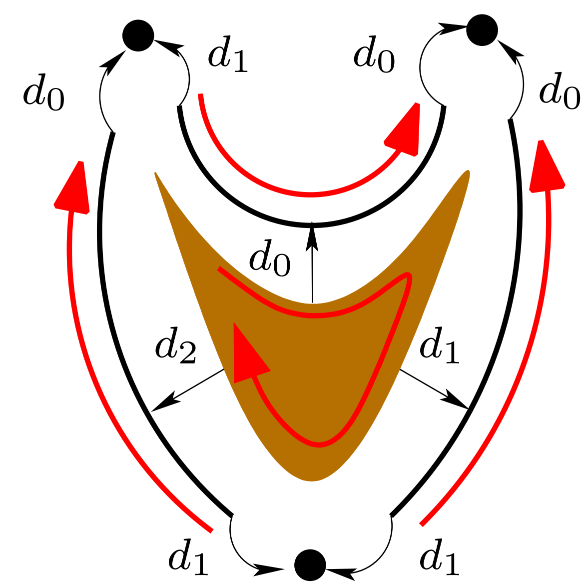
- Simplexes munis d'une orientation



- Bord d'un simplexe

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{dim(\sigma)} (-1)^i \sigma d_i$$

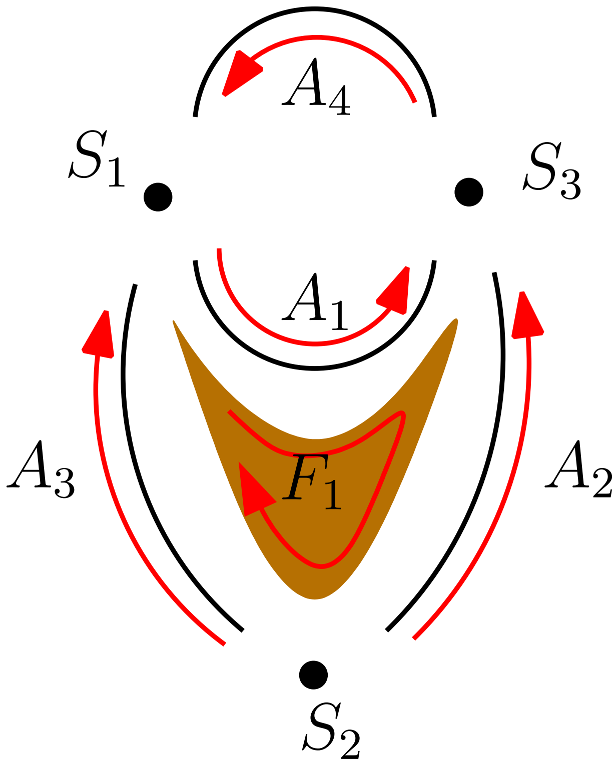
$$\boxed{\partial(\partial(\sigma)) = 0}$$



Complexe de chaînes

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

avec $\partial \circ \partial = 0$



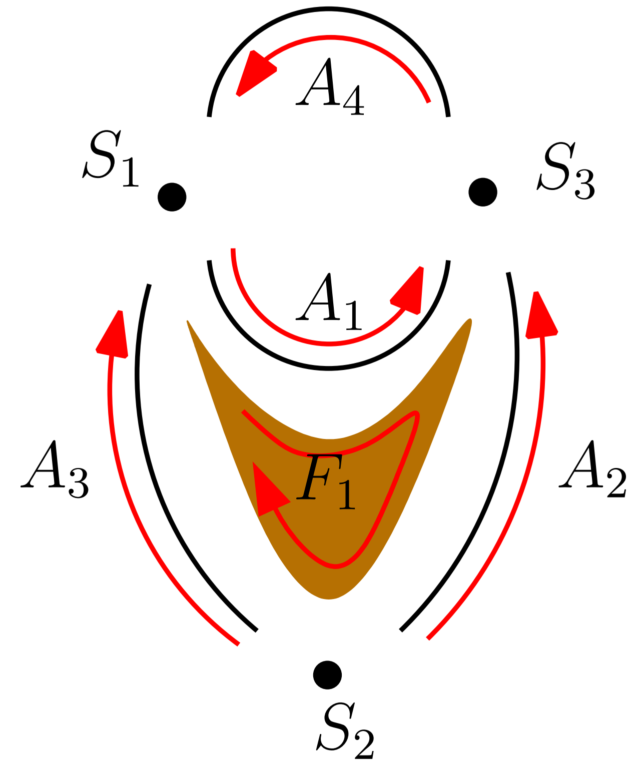
Complexe de chaînes

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

avec $\partial \circ \partial = 0$

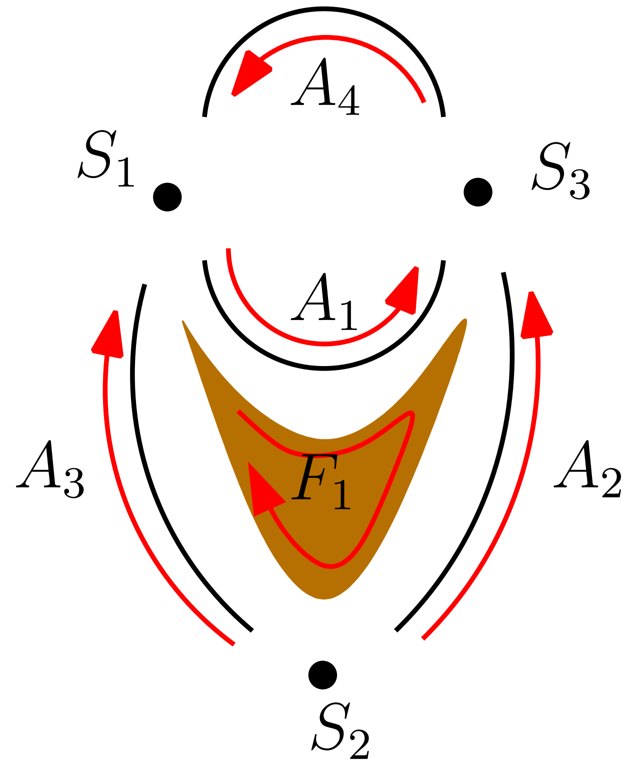
exemples :

$$\begin{aligned}\partial(A_1 + 2A_2) &= \partial(A_1) + 2\partial(A_2)\\ &= (S_3 - S_1) + 2(S_3 - S_2)\\ &= 3S_3 - S1 - 2S_2\end{aligned}$$



$p-$**cycles**

c est un $p-$cycle $\Leftrightarrow \partial_p(c) = 0$

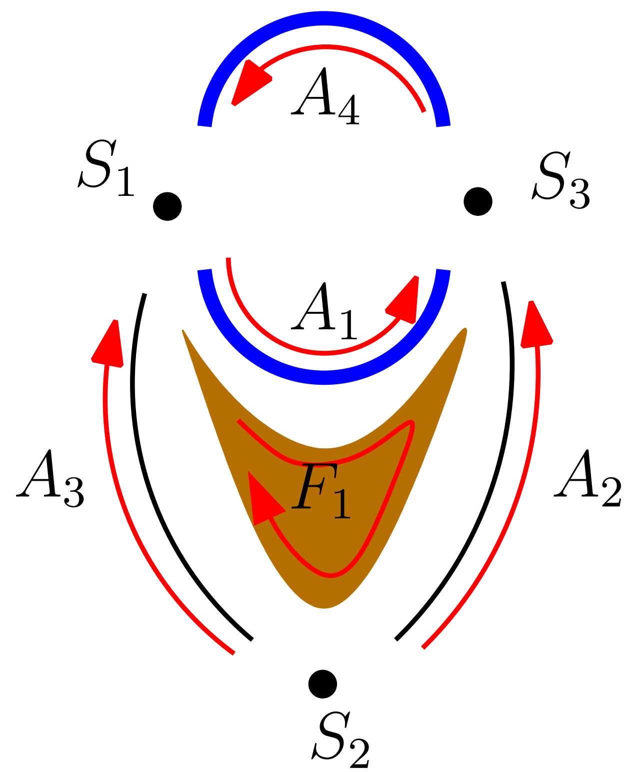


$p-$cycles

c est un $p-$cycle $\Leftrightarrow \partial_p(c) = 0$

exemples :

$\partial(A_1 + A_4) = 0$



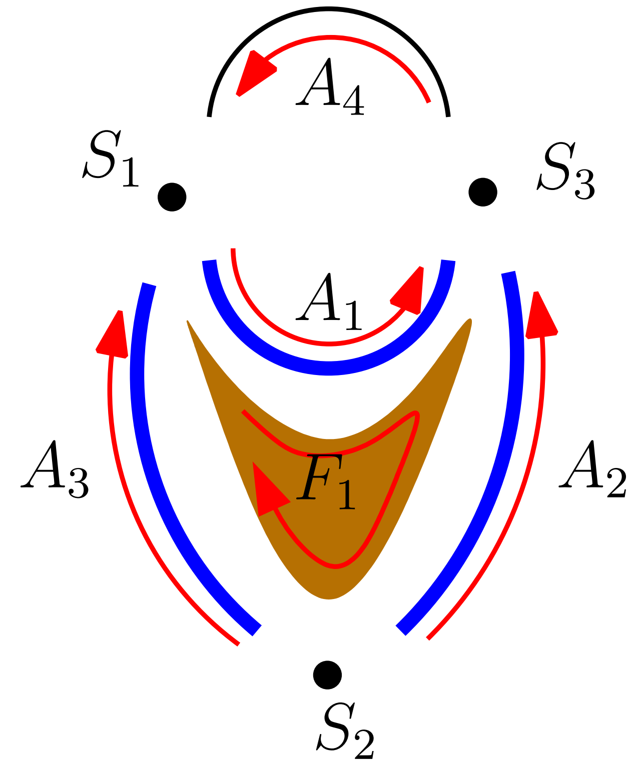
$p-$**cycles**

c est un $p-$cycle $\Leftrightarrow \partial_p(c) = 0$

exemples :

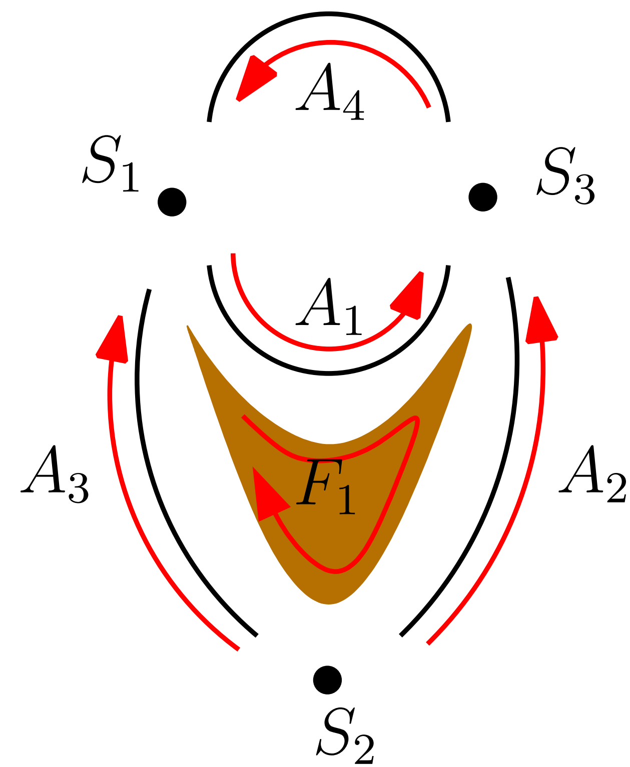
$$\partial(A_1 + A_4) = 0$$

$$\partial(A_1 - A_2 + A_3) = 0$$



$p-$bords

c est un $p-$bord $\Leftrightarrow \partial_{p+1}(c') = c$

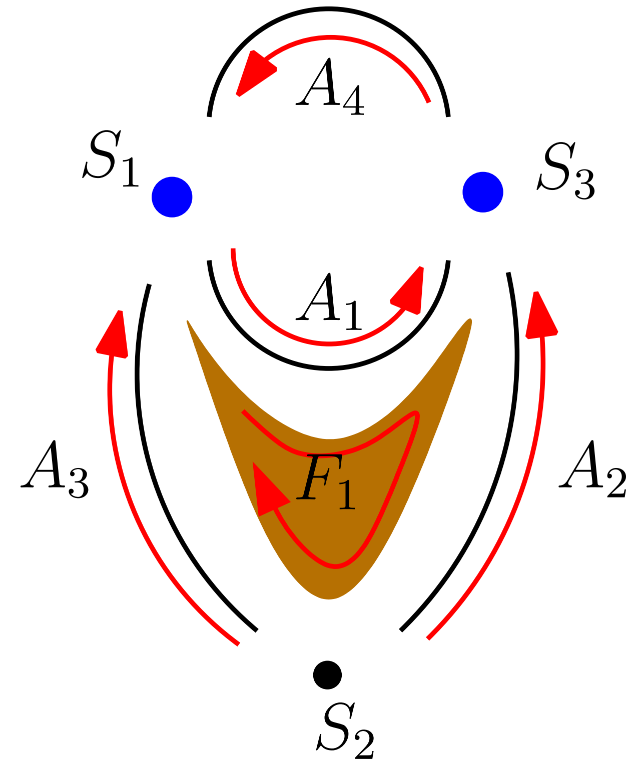


$p-$bords

c est un $p-$bord $\Leftrightarrow \partial_{p+1}(c') = c$

exemples :

$S_1 - S_3 = \partial(A_3 - A_2)$



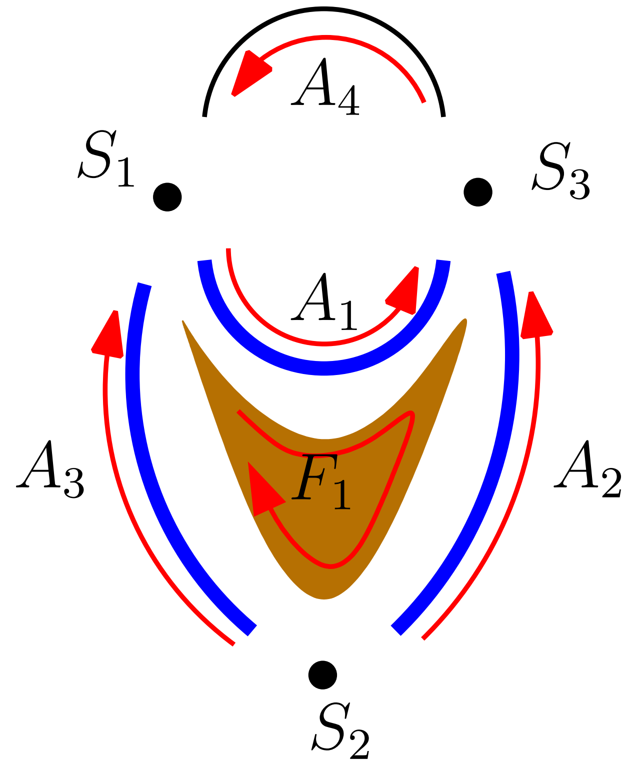
$p-$bords

c est un $p-$bord $\Leftrightarrow \partial_{p+1}(c') = c$

exemples :

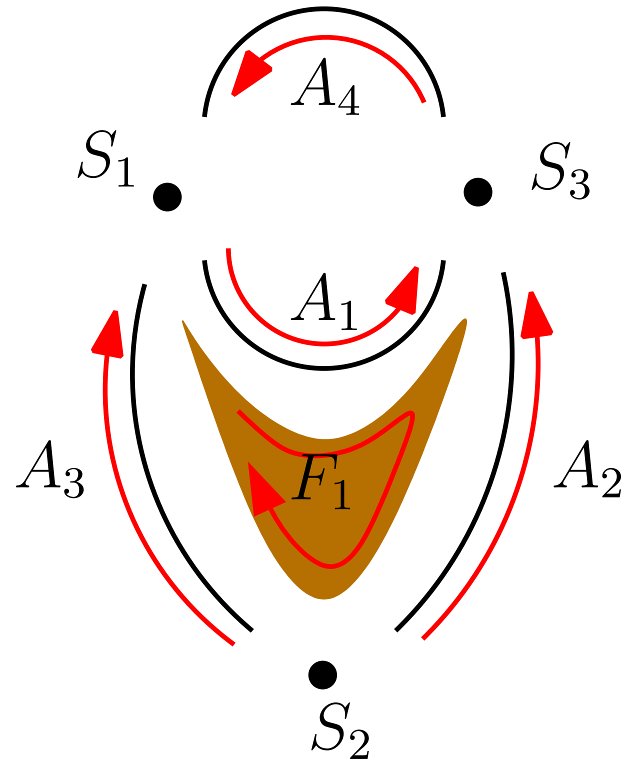
$$S_1 - S_3 = \partial(A_3 - A_2)$$

$$A_1 - A_2 + A_3 = \partial(F_1)$$



Groupes d'homologie H_p

z_1 homologue à $z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 + \partial(c)$

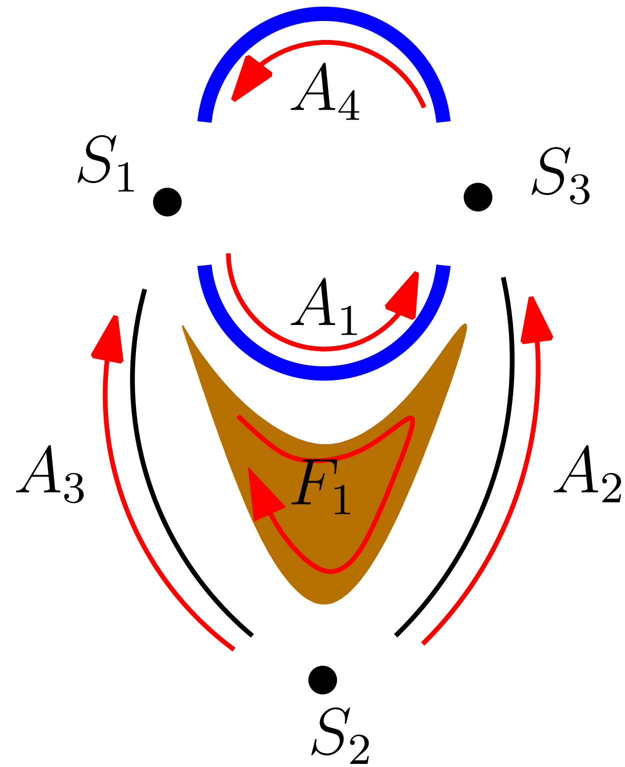


Groupes d'homologie H_p

z_1 homologue à $z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 + \partial(c)$

exemples :

$z_1 \quad = A_1 + A_4$

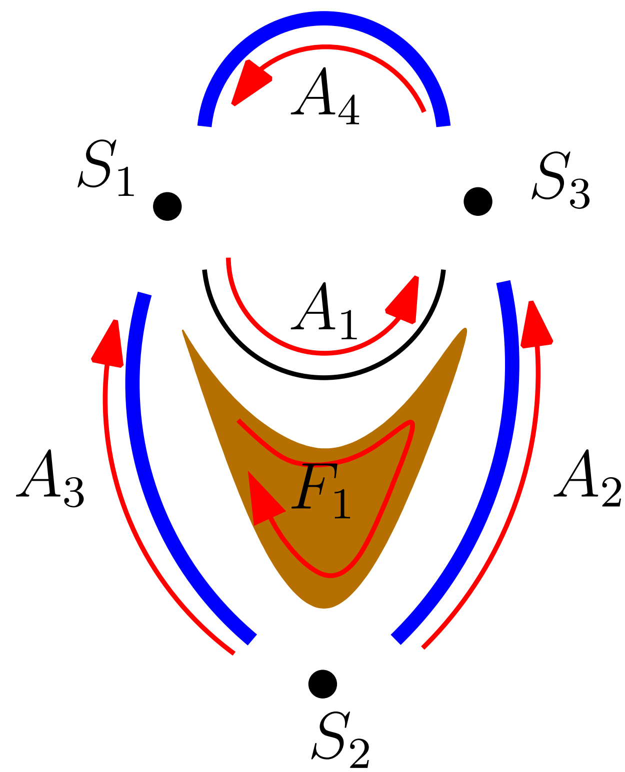


Groupes d'homologie H_p

z_1 homologue à $z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 + \partial(c)$

exemples :

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 + A_4 \\ z_2 &= A_2 + A_4 - A_3 \\ &= z_1 + \partial(-F_1) \end{aligned}$$

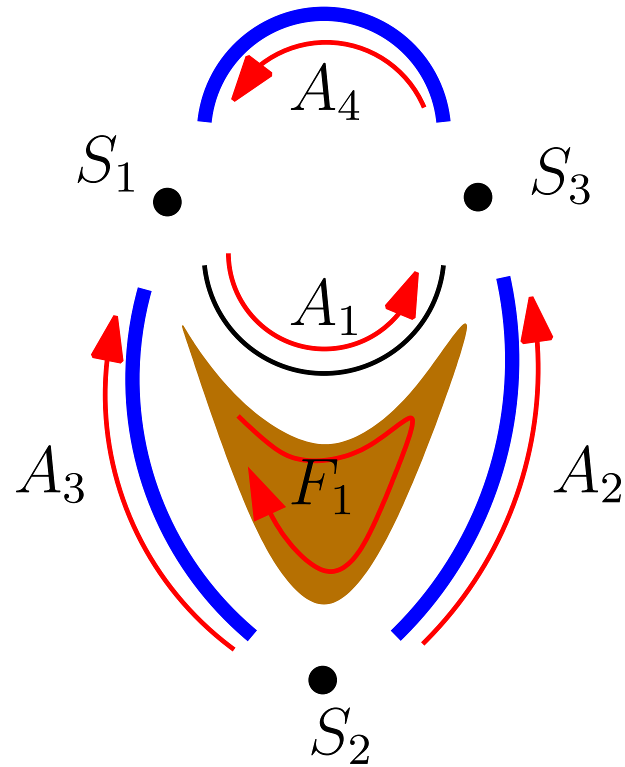


Groupes d'homologie H_p

z_1 homologue à $z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 + \partial(c)$

exemples :

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 + A_4 \\ z_2 &= A_2 + A_4 - A_3 \\ &= z_1 + \partial(-F_1) \end{aligned}$$



H_p : Classes d'équivalence

Groupe d'homologie H_p

- Z_p est un sous-groupe de C_p
- B_p est un sous-groupe de C_p
- B_p est un sous-groupe de Z_p car $\partial \circ \partial = 0$
- H_p est le groupe quotient Z_p/B_p
- $H_p \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta} \oplus \mathbb{Z}/t_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/t_n\mathbb{Z}$

SIC
SIGNAL
IMAGE
COMMUNICATIONS

Méthodes de Calcul

- Calcul des nombres de Betti

  Delfinado and Edelsbrunner. An Incremental Algorithm for Betti numbers of simplicial complexes. 1993

  Kaczynski et al. Computational homology. 2004

- Calcul des nombres de Betti et des coefficients de Torsion

  Storjohann. Near Optimal Algorithms for Computing Smith Normal Forms of Integer Matrices. 1996

  Munkres. Elements of algebraic topology. 1984

- Calcul des générateurs des groupes d'homologie

  Agoston. Algebraic Topology, a first course. 1976

  Peltier et al. *Computation of Homology Groups and Generators.* 2006

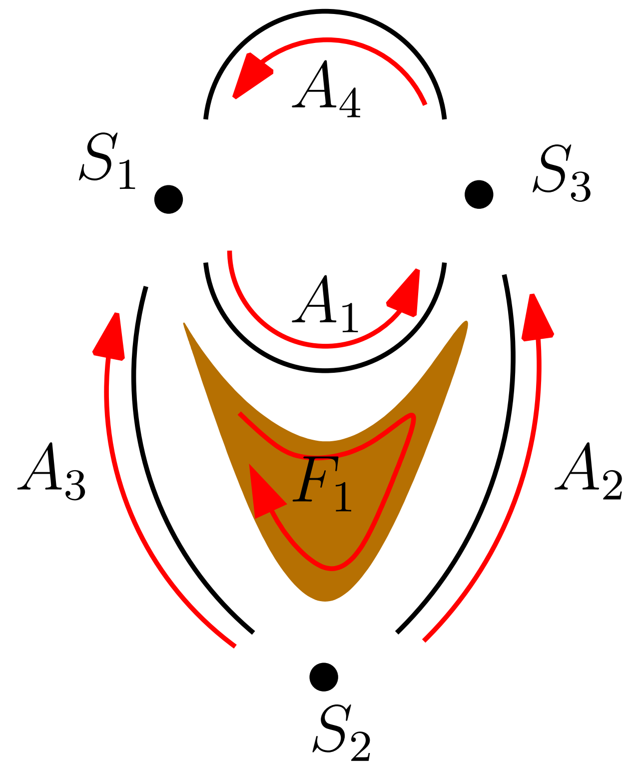
- Calcul des groupes d'homologie de petites dimensions

  Zomorodian. Topology for computing. 2004

  González-Díaz. Toward digital cohomology. 2003

Matrices d'incidence

$$\mathbf{E^0} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\mathbf{E^1} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \!\! \begin{array}{c} F_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Forme Normale de Smith

$$N_*^p = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

où λ_1 divise $\lambda_2 \cdots$ divise λ_k

Forme Normale de Smith

$$N_*^p = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & & & \end{array}\right)$$

$(p+1)-$cycles $\sharp Z_{p+1}$

où λ_1 divise $\lambda_2 \cdots$ divise λ_k

Forme Normale de Smith

$$N_*^p = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & & \end{array}\right)$$

$(p+1)-$cycles $\sharp Z_{p+1}$

$p-$bords $\sharp B_p$

où λ_1 divise $\lambda_2 \cdots$ divise λ_k

Forme Normale de Smith

$$N_*^p = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & & \end{array}\right)$$

$(p+1)-$cycles $\sharp Z_{p+1}$

$p-$bords $\sharp B_p$

$$\boxed{\beta_p = \sharp Z_p - \sharp B_p}$$

où λ_1 divise $\lambda_2 \cdots$ divise λ_k

Forme Normale de Smith

$$N_*^p = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ 0 & & \lambda_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

$(p+1)-$cycles $\sharp Z_{p+1}$

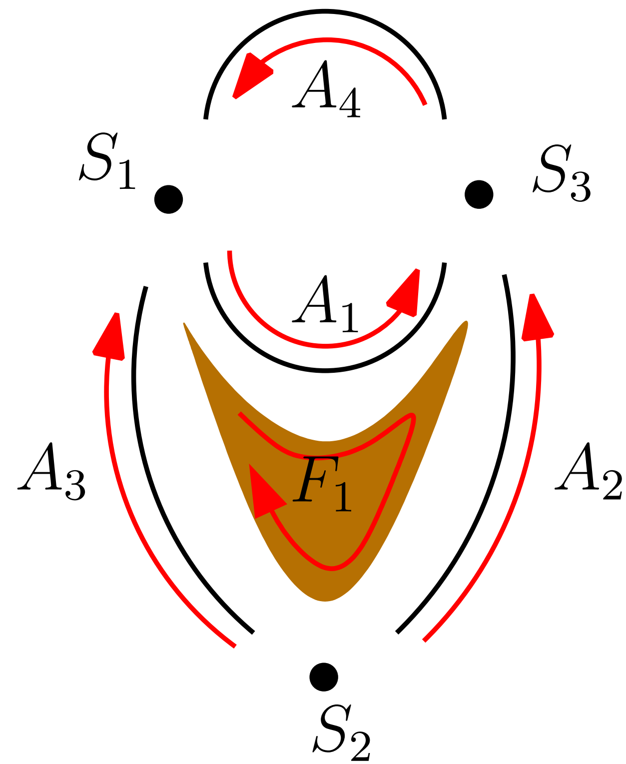
$p-$bords $\sharp B_p$

$$\boxed{\beta_p = \sharp Z_p - \sharp B_p}$$

où λ_1 divise $\lambda_2 \cdots$ divise λ_k

Forme Normale de Smith

$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

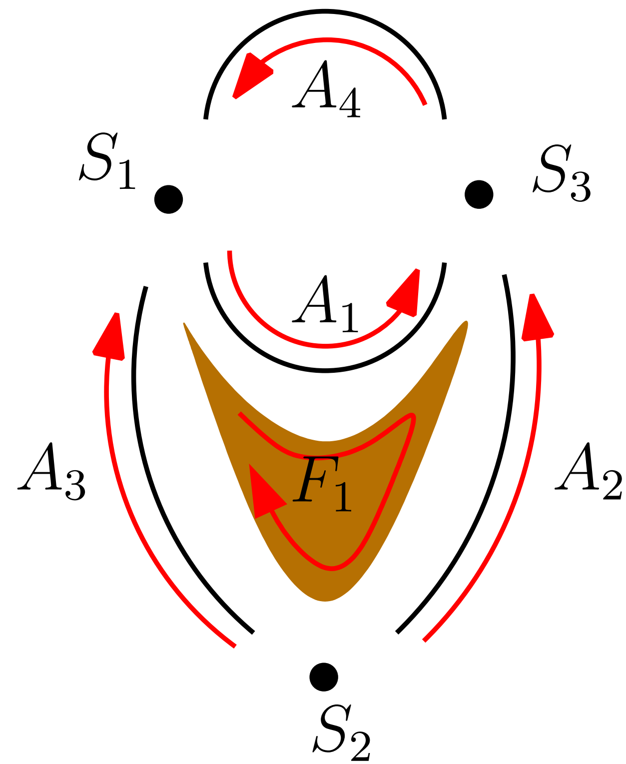


$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forme Normale de Smith

$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

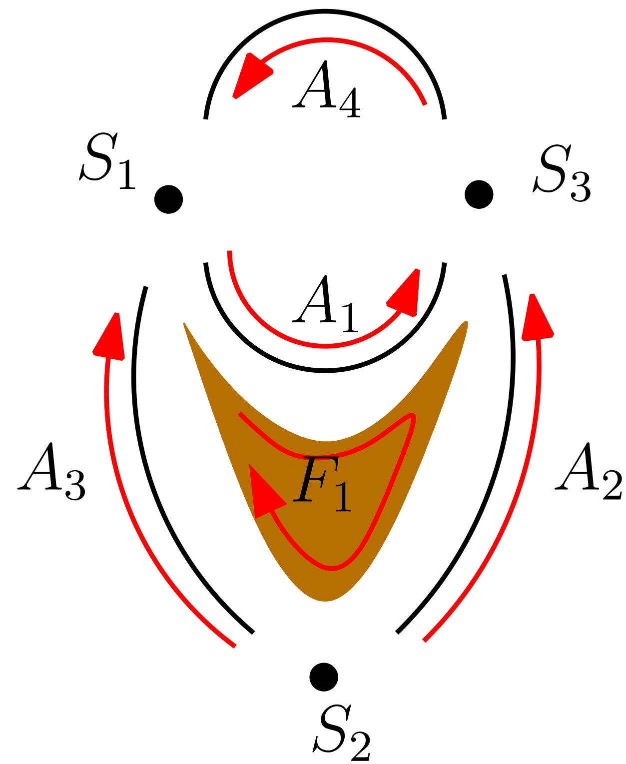
$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Forme Normale de Smith

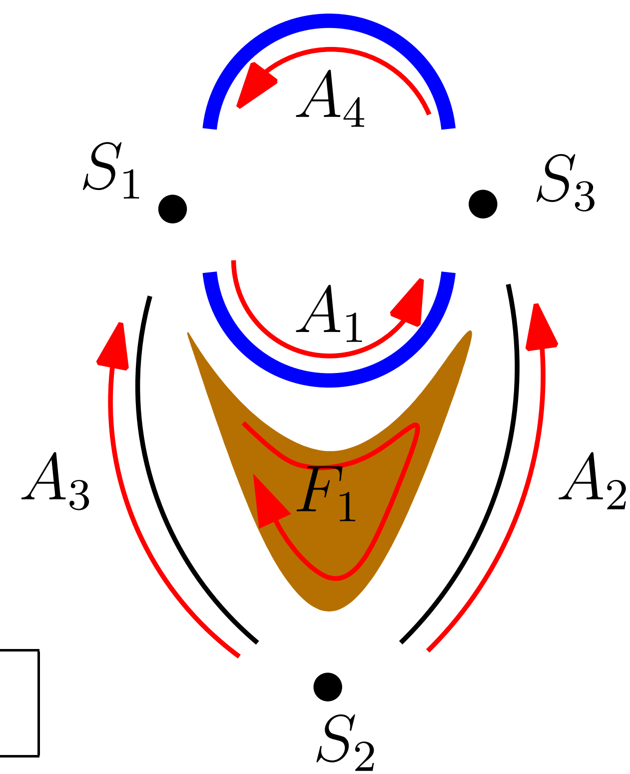
$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Forme Normale de Smith

$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{N}_*^{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\beta_1 = 2 - 1 = 1}$$

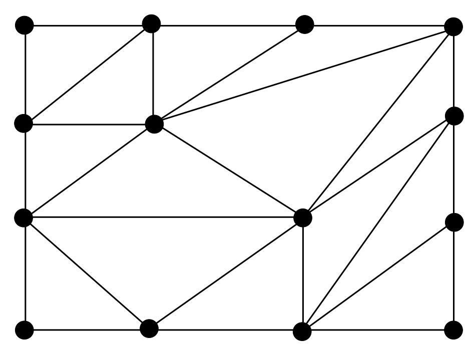
Questions ouvertes

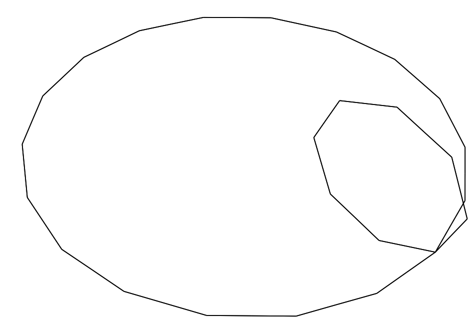
- Comment améliorer les calculs ?
- Quelles sont les utilisations possibles ?
- Quelle est la puissance de représentation de ces groupes ?
- Quels autres invariants peut-on regarder ?

Amélioration des calculs

- Complexité “a priori” élevée (calculs et mémoire)
- Contexte image : propriétés spécifiques des matrices

  très creuses, initialement composées de -1,0,1
- Choix d’une subdivision / représentation adaptée





- Calcul incrémental

Utilisations

- Analyse
  - Homologie calculable en nD
    $\Rightarrow$ Qu'est-ce qu'un trou n-dimensionnel ?
  - Exploitation des générateurs
- Modélisation
  - Vérification *a posteriori* de la validité de certains opérations
  - Définition des opérateurs contraints par l'homologie

SIC
SIGNAL
IMAGE
COMMUNICATIONS

Puissance de représentation

Homéomorphisme

$\Downarrow$

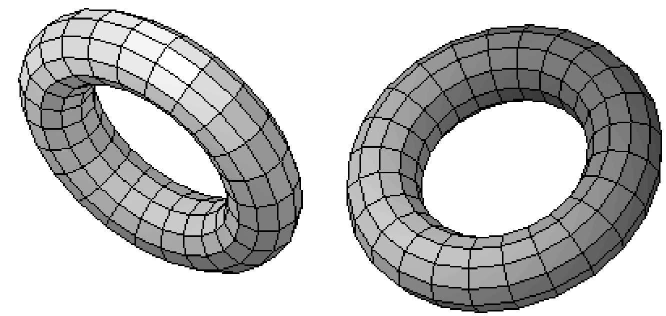
Groupes d'homotopie

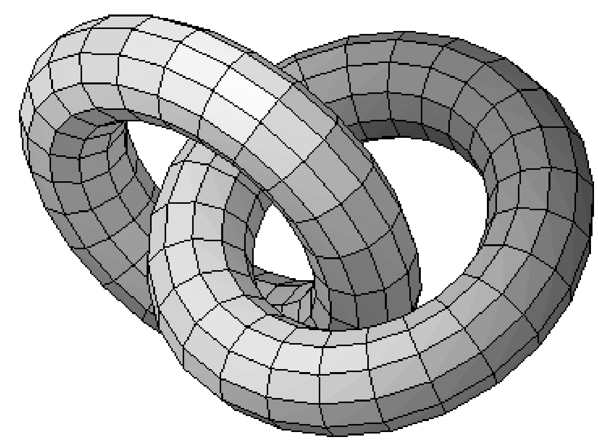
$\Downarrow$

Groupes d'homologie

$\Downarrow$

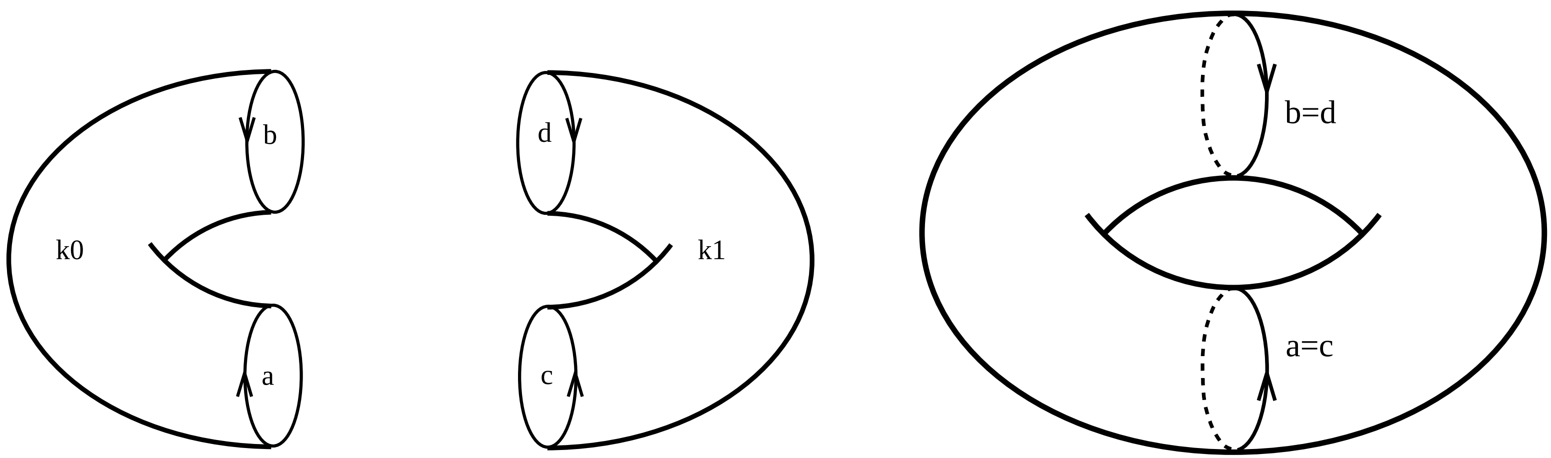
Caractéristique d'Euler





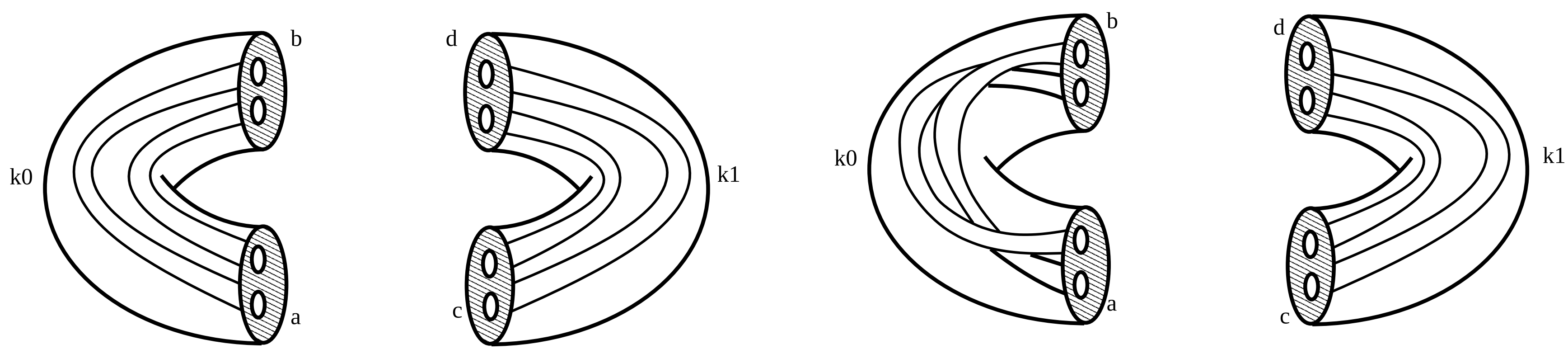
Puissance de représentation

Approche constructive des groupes d'homologie ?



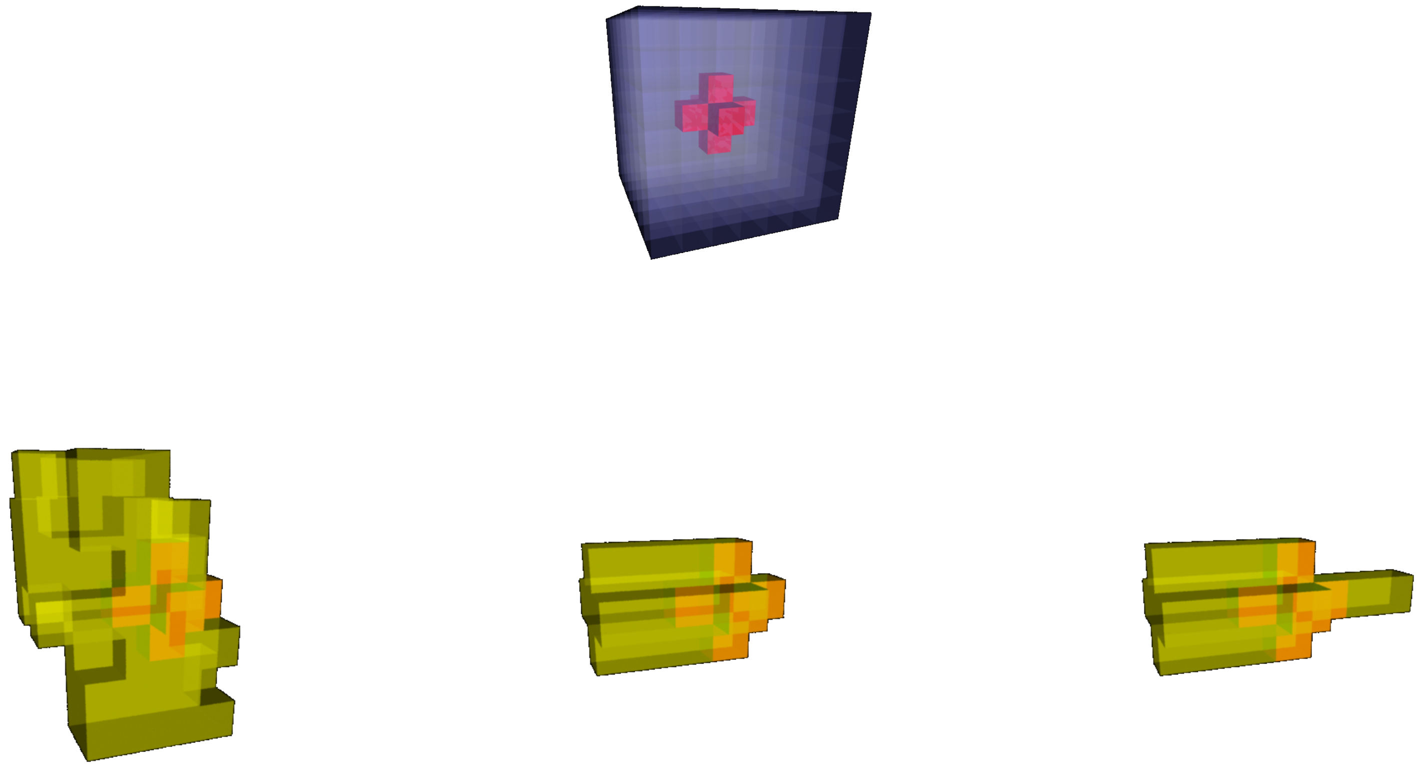
Puissance de représentation

Approche constructive des groupes d'homologie ?



Puissance de représentation

Quid des générateurs ?



Autres invariants topologiques

groupes
d'homotopie

$\Downarrow$

??????

$\Downarrow$

groupes
d'homologie

- anneaux de cohomologie
- groupes d'homologie locaux